

文章编号: 1000-7598(2009)05-1281-06

复合加载情况下非均质地基上 条形基础的极限承载力研究

张其一^{1,2}, 栾茂田^{1,2}

(1.大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116024; 2.大连理工大学 土木水利学院岩土工程研究所, 大连 116024)

摘要: 复合加载情况下精确求解非均质地基上条形基础的极限承载力以及评价影响极限承载力的相关因素, 具有很强的工程实用与理论参考价值。基于极限平衡原理, 在 Mohr-Coulomb 破坏准则的基础上, 将非均质地基上条形基础极限承载力问题等价为一个边界待定的泛函极值问题。利用变分原理得到与平衡方程相等价的积分约束条件以及相应的欧拉方程与横截条件。引入问题边界条件, 利用 VC++6.0 编制了数值计算程序, 求得了复合加载情况下非均质地基破坏时的滑裂面函数与破坏包络曲线。从理论上研究了土体内摩擦角、土体黏聚力、土层强度比与地下水位变化等因素对地基破坏包络曲线的影响。研究表明, 其解答是地基极限承载力真实解的某一最小上限。

关键词: 变分原理; 复合加载; 破坏包络曲线; 极限承载力; 条形基础; 非均质地基
中图分类号: TU 471 **文献标识码:** A

Ultimate bearing capacity of strip footings on inhomogeneous soil foundation under combined loading

ZHANG Qi-yi^{1,2}, LUAN Mao-tian^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

2. Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil and Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: To evaluate the ultimate bearing capacity of strip footings on inhomogeneous soil foundations under combined loading accurately and to estimate the relevant factors which affect the ultimate bearing capacity are very valuable in engineering practice and significant in theory. Based on limit equilibrium theory and yielding criterion of Mohr-Coulomb, the application of the variational principle transforms the problem from its equilibrium equation format to a format of functional extremization equivalently which boundary value is undetermined. A nonlinear program, which is generated using VC++6.0, is used to achieve the function of the 2-D sliding surface and the failure envelope of strip footings on inhomogeneous soil foundation under combined loading. The friction angle of soil, the cohesive force, the shear strength ratio c_i / c_{i+1} and the fluctuation of groundwater level, which affect the ultimate bearing capacity of strip footings on inhomogeneous soil foundation and the failure envelope, are studied theoretically. The results show that it is a certain upper bound minimum solution of the bearing capacity of soil foundation.

Key words: variational principle; combined loading; failure envelope; ultimate bearing capacity; strip footing; inhomogeneous soil foundation

1 引言

水利、港口、海洋工程以及工业与民用建筑物不仅受到自身所引起的竖向荷载的长期作用, 而且往往遭受到波浪、水流、暴风等所引起的水平荷载、力矩荷载的作用。这些荷载通过基础传到地基上,

从而使地基受到水平荷载、竖向荷载和力矩荷载的共同作用, 这种加载方式一般定义为复合加载模式。同时, 建筑物下覆地基一般具有层状非均质结构, 而且黏土地基中往往存在软弱下卧层。因此, 在深水码头、海洋平台等大型海洋工程建筑物的基础与地基设计中, 为了准确求得地基的整体失稳模式与

收稿日期: 2007-09-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50579006; No. 50179006)。

第一作者简介: 张其一, 男, 1977 年生, 博士研究生, 主要从事土工基本理论与数值分析、海洋土力学计算等方面的研究。E-mail: zhangqi1@163.com

通讯作者: 栾茂田, 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程教学与科研工作。E-mail: mtluan@dlut.edu.cn

精确求得地基的极限承载力,除了需要考虑基础上的荷载组合外,还必须考虑地质条件的影响。

目前,对于复合加载情况下地基极限承载力的研究,许多学者利用极限分析定理、滑移线场理论以及极限平衡原理等方法,从理论上直接求得了二维条形基础的极限承载力公式^[1-3]。在复合加载模式下,Bransby^[4]、Murff^[5]和 Taiebat 等^[6]针对非均质地基上的条形基础,利用有限元数值方法求得了地基极限承载力。实践证明,在复合加载情况下,上述极限承载力公式虽然具有一定的适用性,但不能精确求得非均质地基上条形基础的极限承载力,而且计算结果的正确性与合理性也缺乏理论基础。本文在大连理工大学栾茂田教授对二维非均质地基上条形基础极限承载力研究工作的基础上^[7-8],利用变分原理与土体塑性极限平衡原理,通过建立滑动土体与条形基础的整体平衡方程和构造极限荷载最小化问题的方法,求得了非均质地基上复合加载模式下条形基础的极限承载力与地基破坏包络曲线,并从理论上分析了影响地基失稳破坏的不同因素。所谓破坏包络曲线是指,在水平荷载 H 、竖向荷载 V 和力矩荷载 M 共同作用下地基达到整体破坏或极限平衡状态时,各个荷载分量的组合在三维荷载空间 (V, H, M) 中形成的一个外凸曲面^[9-10]。

2 计算原理

2.1 基本假定与计算方法

为了考虑地基的层状非均质特性,本文假定:

①宽度为 B 的条形基础埋置于水平成层分布的地基上;②各层土体黏聚力 c_i 沿地基深度呈线性变化,土体重度与内摩擦角分别为 γ_i 和 φ_i ;③地下水位以下土体采用浮重度。计算简图及坐标系如图 1 所示。

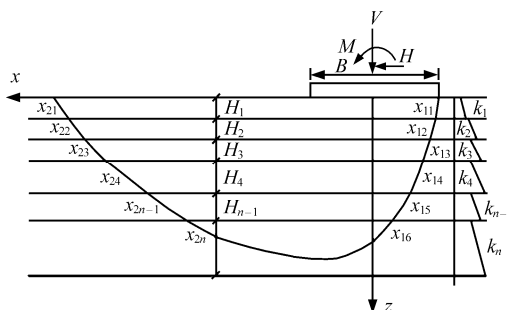


图 1 非均质地基受力分析及破坏机制
Fig.1 the failure mechanics and stress state of homogeneous soil foundation

根据土体极限平衡原理,列出基础与地基在土体自重与外力共同作用下的整体平衡方程,并引入

Mohr-Coulomb 破坏准则来考虑破坏滑裂面上正应力 σ 与剪应力 τ 之间的关系,采用 Lagrange 乘子法来构造与平衡方程等价的泛函。利用变分原理给出与泛函驻值等价的控制方程,结合边界条件来求解该边值问题,从而求得复合加载模式下地基破坏时的滑裂面方程与条形基础的极限承载力。

当土体达到极限平衡状态时,滑动土体与条形基础整体满足平面力系的 3 个平衡方程,即 $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_z = 0$ 和 $\sum M = 0$,土体滑裂面上正应力与剪应力服从 Mohr-Coulomb 破坏准则:

$$\tau(X) = c + \sigma(X) \tan \varphi \quad (1)$$

式中:黏聚力 c 与内摩擦角 φ 水平成层分布,且服从:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_i = c_{i0} + k_i \gamma_i \left(Z - \sum_{j=1}^{i-1} H_j \right), \quad \varphi = \varphi_i \\ \sum_{j=1}^{i-1} H_j &\leq Z \leq \sum_{j=1}^i H_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: n 为地基土层数。

为了计算的方便,在求解过程中作如下量纲变化:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{X}{B}, \quad z = \frac{Z}{B}, \quad \sigma = \frac{\sigma}{\gamma B}, \quad c = \frac{c}{B} \\ v &= \frac{V}{\gamma B^2}, \quad h = \frac{H}{\gamma B^2}, \quad m = \frac{M}{\gamma B^3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

水平方向力的平衡方程 $\sum F_x = 0$ 为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{1i}}^{x_{1i+1}} h_i dx + \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} h_i dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i}} h_i dx = h \quad (4)$$

式中: $h_i = -\sigma_i z_x + (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i)$ 。

竖直方向力的平衡方程($\sum F_z = 0$)为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{1i}}^{x_{1i+1}} v_i dx + \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} v_i dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i}} v_i dx = v \quad (5)$$

式中: $v_i = \sigma_i + (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) z_x - \gamma_i z$ 。

转动的力矩平衡方程($\sum M_y = 0$)为

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{1i}}^{x_{1i+1}} m_i dx + \int_{x_{1n}}^{x_{2n}} m_i dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i}} m_i dx = m \quad (6)$$

其中:

$$m_i = \sigma_i [z_x z + x] - (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) [z - z_x x] + \gamma_i z x \quad (7)$$

2.2 泛函构造与变分分析

求解上述平衡方程的目的是为了求解复合加

载模式下地基达到极限平衡状态时条形基础上的极限荷载与地基破坏滑裂面, 可以表示为数学上的有约束极值问题 $f(V, H, M) = \min f(v, h, m, B, c, \varphi)$ 。以能量原理为基础, 将水平方向的力平衡方程与转动的力矩平衡方程作为竖直方向力平衡方程的约束条件, 利用 Lagrange 乘子法构造泛函:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s_i dx + \int_{x_n}^{x_{2n}} s_i dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{2i+1}}^{x_{2i}} s_i dx - s \quad (8)$$

式中: $s_i = v_i + \lambda_1 h_i + \lambda_2 m_i$; $s = v + \lambda_1 h + \lambda_2 m$; $i = 1, 2, \dots, n$; λ_1 、 λ_2 为 Lagrange 乘子。利用泛函取驻值的必要条件 ($\delta\Pi = 0$), 结合几何边界条件与地基表面出逸点和层间交接点处的已知条件, 可以得到下列与泛函取驻值相等价的边值问题:

(1) Euler-Lagrange 方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S_i}{\partial \sigma_x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial S_i}{\partial z} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial S_i}{\partial z_x} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(2) 积分约束条件

$$\min \Pi = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

(3) 可动边界点处的横截条件与交接点处的折射条件

$$S_o - z_x \left(\frac{\partial S_o}{\partial z_x} \right) = 0 \quad (11)$$

$$S_i - z_x \left(\frac{\partial S_i}{\partial z_x} \right) = S_{i-1} - z_x \left(\frac{\partial S_{i-1}}{\partial z_x} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

(4) 基础与地基间的几何边界条件

$$x_0 = -1, \quad z_0(x) = 0 \quad (13)$$

2.3 边值问题的求解

为了方便上述偏微分方程的求解, 本文在极坐标系内求解该边值问题。现引入如下坐标变换公式, 如图 2 所示。

$$\left. \begin{aligned} \rho \sin \theta &= z - \lambda_1 / \lambda_2 \\ -\rho \cos \theta &= x + 1 / \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当条形基础上存在力矩荷载时 ($\lambda_2 \neq 0$), 通过求解欧拉方程中的应力微分方程, 可以求得地基土层中破坏滑裂面方程为

$$\rho = \rho_0 \exp(\tan \varphi \beta) \quad (15)$$

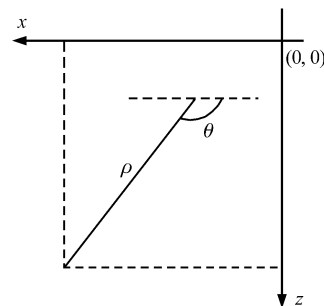


图 2 直角坐标与极坐标间转换关系

Fig.2 Relationship between the polar and the Cartesian coordinate system

式中: φ 为土层中土体内摩擦角; ρ_0 为滑裂面的初始极径; β 为极径与 x 轴负轴所成的角。滑裂面方程在直角坐标系中记为 $z = z_1(x)$ 。将破坏滑裂面方程与欧拉方程中的位移微分方程联立, 可求得土层中滑裂面上正应力方程为

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1(\rho_0, \theta) = \exp[2 \tan \varphi (\beta_2 - \theta)] \cdot \\ &\left[\frac{-c \sin \beta_2}{\cos \beta_2 + \tan \varphi \sin \beta_2} + \frac{c}{\tan \varphi} - \right. \\ &\gamma \rho_0 \frac{1}{1 + 9 \tan^2 \varphi} \exp(\tan \varphi (\beta_2 - \beta_1)) \cdot \\ &(\sin \beta_2 + 3 \tan \varphi \cos \beta_2) \left. \right] + \gamma \rho_0 \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi} \cdot \\ &\exp(\tan \varphi (\theta - \beta_1)) (\sin \theta + 3 \tan \varphi \cos \theta) - \frac{c}{\tan \varphi} \end{aligned} \quad (16)$$

式中: β_1 为滑裂面与土层上表面交点处的极角; β_2 为滑裂面与土层下表面交点处的极角。

当地基中存在软弱夹层时, 破坏土体将沿软弱夹层发生平动破坏, 此时滑裂面方程中 $\lambda_2 = 0$ 。通过求解欧拉方程中的应力偏微分方程, 可求得软弱夹层滑裂面方程为

$$z = z_2(x) = \frac{1}{\lambda_1} x + z_0 \quad (17)$$

将上式与欧拉方程中的位移偏微分方程联立, 可以求得夹层破坏面上的正应力方程为

$$\sigma = \sigma_2(x) = \frac{\gamma}{\lambda_1} x + \sigma_0 \quad (18)$$

式中: z_0 、 σ_0 为积分常数, 可以通过边界条件确定。

通过在破坏滑裂面方程中引入形状判断函数 (19), 从而可以构成地基复合破坏滑裂面方程 (20) 以及地基破坏滑裂面上的正应力方程 (21), 如图 3 所示。

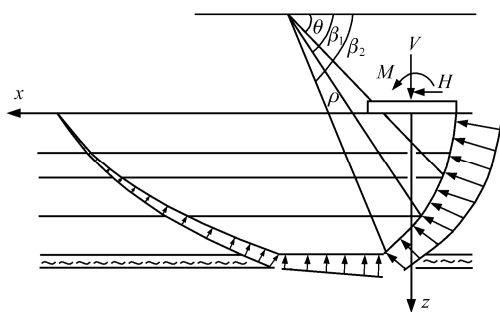


图3 复合加载情况下地基极限平衡状态
Fig.3 Limit equilibrium of foundation under combined loading

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1, & z \in \text{黏性土层} \\ 0, & z \in \text{软弱夹层} \end{cases} \quad (19)$$

$$z(x) = \Phi(z)z_1(x) + [1 - \Phi(z)]z_2(x) \quad (20)$$

$$\sigma(x) = \Phi(z)\sigma_1(x) + [1 - \Phi(z)]\sigma_2(x) \quad (21)$$

针对地基破坏滑裂面方程 (20) 与滑裂面上正应力分布函数 (21), 在 Visual C++ 平台上采用数值

迭代算法, 编制计算机程序对隐式非线性方程组 (22) 进行数值求解, 获得了地基破坏时的临界参数与条形基础的极限承载力:

$$f(v, h, m, B, c, \varphi) = 0 \quad (22)$$

该数值算法是通过对非线性方程组进行逐段线性化, 再对变量进行消元与回代的方法来求解。具体迭代过程如下: ①假定竖向荷载 V 与水平荷载 H 分别为 0, 求得极限力矩荷载 M ; ②在不同力矩荷载 M 作用下, 求解竖向荷载 V 与水平荷载 H 构成的地基破坏包络曲线。

3 算例计算与分析

为了研究土体参数对非均质地基极限承载力的影响, 本文以双层地基为例, 利用编制的通用计算机程序, 针对图 4 所示的 8 种地基剖面进行了大量计算, 从理论上探讨了各种因素对复合加载情况下地基极限承载力与地基破坏包络曲线的影响。图 5 给出了图 4 所示 8 种情况下的地基破坏滑裂面以及滑裂面上正应力分布的示意图。

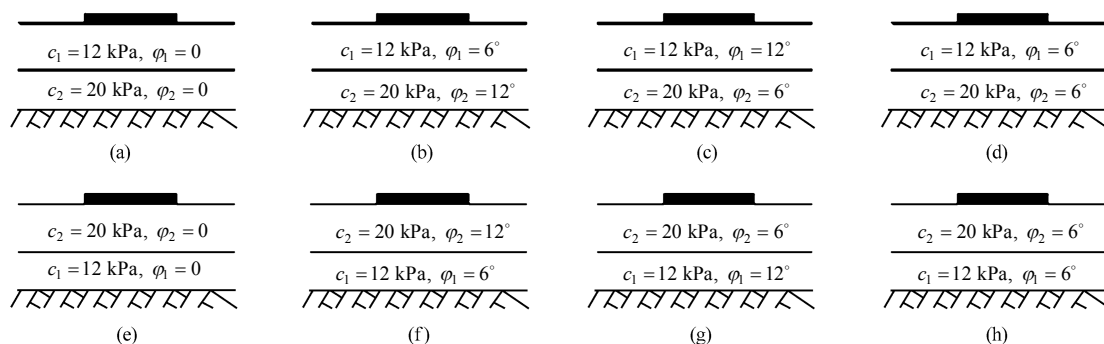


图4 用于计算的非均质地基剖面
Fig.4 The cross-section of inhomogeneous foundation

(1) 非均质地基破坏模式

理论推导与计算结果同时表明: 成层非均质地基土体发生破坏时, 一般会发生转动和平动 2 种破坏模式, 相应的临界滑裂面为分段对数螺旋线和直线 2 种情况。对于内摩擦角 $\varphi = 0$ 的不排水饱和软黏土地基, 对数螺旋线形状的破坏滑裂面退化为圆弧滑裂面; 当成层地基中存在软弱夹层时, 极限土体会沿着软弱夹层层面发生平动破坏。研究表明, 地基破坏滑裂面与地基破坏包络曲线不仅决定于土体的黏聚力 c_i 与内摩擦角 φ_i , 而且取决于黏聚力沿深度非均匀变化系数 k_i 、土层厚度 H_i 、土层间强度比 c_i/c_{i+1} 以及地下水位的变化等情况。双层地基破坏滑裂面与地基破坏模式如图 5 所示。

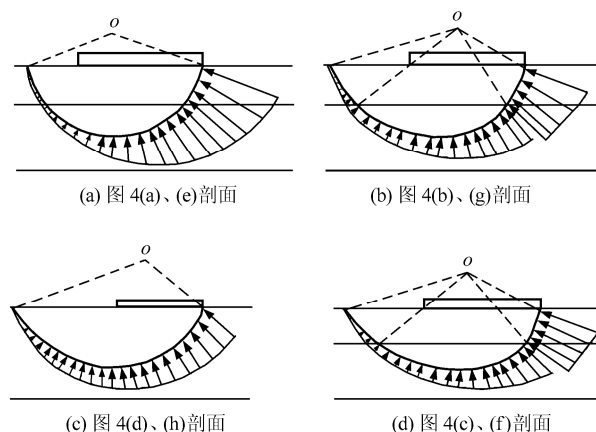


图5 非均质地基破坏滑裂面
Fig.5 Sliding surface of inhomogeneous foundation

(2) 摩擦角对极限承载力与破坏包络曲线的影响

为了研究土体内摩擦角对地基极限承载力与地基破坏包络曲线的影响, 本文分别针对摩擦角不同的3种均质地基进行了计算。计算结果表明: 随着土体内摩擦角 φ 的逐渐增大, 滑动区域逐渐变深、变宽, 竖向极限承载力 V 逐渐提高, 地基破坏包络曲线逐渐扩大。地基破坏滑裂面形式以及破坏包络曲线随土体内摩擦角的变化曲线如图6所示。在图6所示的破坏包络曲线中, 当水平荷载 $H=0$ 时, 竖向极限承载力同 Terzaghi 公式计算结果一致。

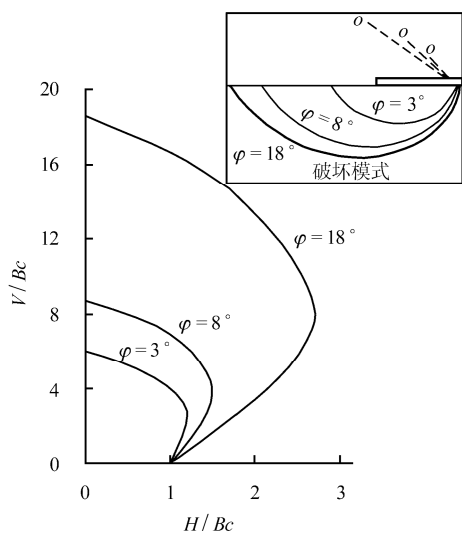


图6 摩擦角对地基破坏包络曲线的影响
Fig.6 The effect of friction angle on the failure envelope

(3) 黏聚力沿深度变化对极限承载力与破坏包络曲线的影响

非均质地基中土体黏聚力沿地基深度的变化关系, 极大地影响着极限平衡状态时地基的破坏包络曲线。计算表明, 地基破坏包络曲线随着黏聚力变化系数 k_i 的增大而扩大。为了计算方便, 本文假定各层土体内摩擦角 $\varphi_i=0$, 当条形基础上力矩荷载固定时, 水平荷载 H 与竖向荷载 V 构成的破坏包络曲线随黏聚力变化系数 k_i 的变化关系如图7所示。

(4) 土层间强度比 c_i/c_{i+1} 对地基极限承载力与破坏包络曲线的影响

为了研究土层强度比对地基破坏包络曲线的影响, 本文假定非均质地基为双层不排水饱和和软黏土地基, 在上层土深度为 $H_1=3B$ 的情况下, 针对上下土层强度比 c_1/c_2 为1.0、0.5、0.25、0.20等4种情况, 进行了数值计算。结果表明, 随着土层强

度比的逐渐降低, 地基破坏包络曲线呈逐渐扩大的趋势。成层地基破坏包络曲线随土层强度比的变化关系如图8所示。

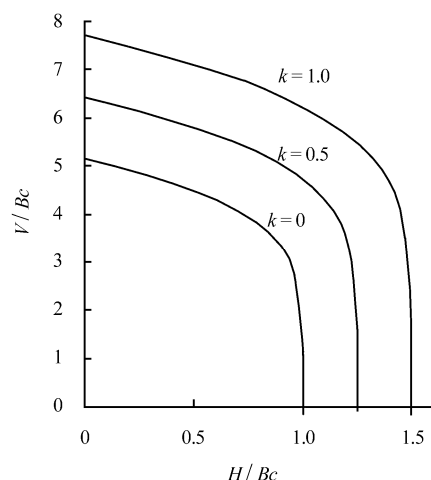


图7 黏聚力系数对地基破坏包络曲线的影响
Fig.7 The effect of varying inclination of cohesion to the failure envelope

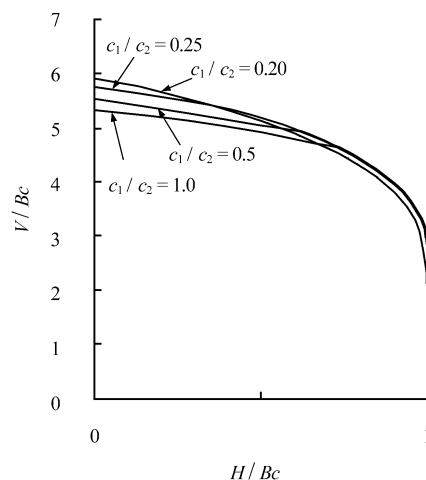


图8 土层强度比对地基破坏包络曲线的影响
Fig.8 The effect of shear strength ration on the failure envelope

(5) 地下水位变化对地基极限承载力与破坏包络曲线的影响

本文假定地下水位的变化对黏聚力和内摩擦角没有影响, 只是使土体重度 γ 发生了变化。地下水位以上土体采用有效重度, 地下水位以下土体采用浮重度, 一般情况下浮重度为有效重度的0.5~0.7倍。当地基土体的重度由有效重度变化为浮重度时, 地基极限承载力会降低, 破坏包络曲线呈缩小趋势。非均质地基破坏包络曲线随地下水位的变化关系如图9所示。

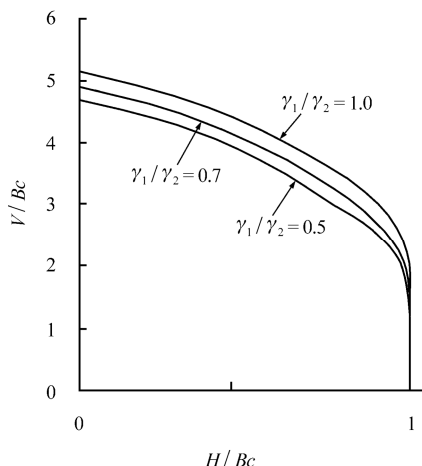


图9 地下水位的变化对地基破坏包络曲线的影响

Fig.9 Effect of groundwater level fluctuation on the failure envelope

4 结 论

(1) 在变分原理与极限平衡原理的基础上, 本文求得了复合加载模式下非均质地基发生整体破坏时的滑裂面方程与地基破坏包络曲线, 并从理论上研究了影响地基破坏包络曲线的相关因素。

(2) 由于将非均质地基土体视为理想刚塑性材料, Lagrange 乘子 λ_1 、 λ_2 可以认为是土体破坏时的水平运动速度与转动速度。本文构造的无约束泛函极值问题可以认为是将极限分析上限定理与极限平衡原理相结合, 满足了运动许可的速度场, 因而本文解为条形基础极限承载力真实解的某一最小上限解。

(3) 对于复合加载情况下非均质地基上的条形基础, 本文从理论上证明了内摩擦角 φ 、黏聚力沿深度变化系数 k_i 、土层强度比 c_i/c_{i+1} 、土层厚度 H_i 、地下水位变化等情况对极限承载力与地基破坏包络曲线的影响, 为大型建筑物基础与地基的设计提供了理论参考依据。

参 考 文 献

- [1] GREEN A P. The plastic yielding of metal junctions due to combined shear and pressure[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1954, (2): 197—211.
- [2] 沈珠江. 散粒体极限平衡理论及其应用[J]. *水利学报*, 1962, (3): 22—36.
SHEN Zhu-jiang. The limit equilibrium theory and its application of granular material[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1962, (3): 22—36.
- [3] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均质地基上浅基础的极限承载力[J]. *岩土工程学报*, 1988, 10(4): 14—27.
LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Ultimate bearing capacity of shallow footings on non-homogeneous soil foundations[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, 10(4): 14—27.
- [4] BRANSBY M F, RANDOLPH M F. Combined loading of skirted foundations[J]. *Geotechnique*, 1998, 48(5): 637—655.
- [5] MURRFF J D. Limit analysis of multi-footing foundation systems[C]//Proceedings of the 8th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Rotterdam: Balkema A A, 1994: 233—244.
- [6] TAIEBAT H A, CARTER J P. Bearing capacity of strip and circular foundations on undrained clay subjected to eccentric loads[J]. *Geotechnique*, 2002, 52(1): 61—64.
- [7] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 土体稳定分析极限平衡法改进及其应用[J]. *岩土工程学报*, 1992, 14(1): 20—29.
LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Improved limit equilibrium method and its applications to stability analysis of soil masses[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1992, 14(1): 20—29.
- [8] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 水平与竖向荷载共同作用下非均质地基的稳定性[C]//中国土木工程学会第五届土力学及基础工程学术会议论文选集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990.
- [9] CASSIDY M J, RANDOLPH M F, BYRNE B W. A plasticity model describing caisson behaviour in clay[J]. *Applied Ocean Research*, 2006: 345—358.
- [10] BYRNE B W, HOULSBY G T. Experimental investigations of the response of suction caissons to transient combined loading[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 2004, 130(3): 240—253.